Remarques sur *Prior remplace Diodore*

12 mars 2025

J'ai relu cet article comme on me l'a demandé pour en contrôler les aspects purement formels, d'orthographe et de typographie. Or en me penchant sur le contenu, il m'est apparu que son argument ne tenait pas. J'expose ce problème dans la section 1, avant de soulever deux problèmes moins cruciaux section 2, puis de souligner des questions de pure forme section 3.

1 Un problème avec l'argument général

L'auteur propose d'alléger la version de Prior de l'argument dominateur de Diodore en supprimant deux prémisses de Diodore (en fait *les* deux prémisses, puisqu'il n'y en a que deux) et en « ne conservant que les deux prémisses additionnelles de Prior » ; en ajoutant une simple prémisse encore, l'auteur dit atteindre le même résultat, à savoir qu'un événement qui ne se produira jamais est impossible.

En fait, la proposition ne s'appuie pas exactement sur les deux prémisses de Prior. L'auteur reprend bien une des deux prémisses, la prémisse 4 de Prior, prémisse (D) et formule (4) dans l'article, qui est une loi logique basée sur la signification des opérateurs temporels (et qui assure que la relation vers le passé est l'inverse de celle vers le futur) :

$$Q \vdash_{\mathbf{K_t}} \neg\mathbf{P}\neg\mathbf{F}Q \tag{4}$$

Mais la deuxième prémisse de Prior est transformée. Prior propose sa prémisse (5), prémisse (E) et (5) dans l'article, selon laquelle pour un événement qui ne se produit ni maintenant ni jamais à l'avenir, il y a un instant dans le passé après lequel cet événement ne se produira jamais :

$$(\neg Q \wedge \neg\mathbf{F}Q) \rightarrow \mathbf{P}\neg\mathbf{F}Q \tag{5}$$

L'auteur propose de remplacer cette prémisse par une prémisse plus forte :

$$\neg\mathbf{F}Q \rightarrow \mathbf{P}\neg\mathbf{F}Q \tag{8}$$

qualifiant (5) d'« affaiblissement inutile de (8) ».

L'auteur aboutit alors (logiquement) à une conclusion qui *n'est pas* celle de Diodore ou Prior : pour ceux-ci, la conclusion est qu'un événement qui ne se produit pas maintenant et ne se produira jamais est impossible ; pour l'auteur, elle est qu'un événement qui ne se produira jamais est impossible (la condition de non-occurrence de l'événement dans le présent a disparu).

Or cette disparition de $\neg Q$ de l'antécédent du conditionnel entre (5) et (8) n'a rien d'anodin, et l'auteur appuie l'abandon de (5) pour (8) sur une preuve qui s'avère *erronée*.

Tout d'abord l'auteur reprend de Prior et Fitting & Mendelsohn l'idée que « (5) n'est valide qu'à la condition d'imposer au temps une structure discrète ». En réalité, Prior comme Fitting & Mendelsohn sont ici imprécis ; ce qu'ils visent est une structure *non dense* qui permette de trouver un instant précédant un instant donné (cf. l'argument de Prior 1967 p.49), le caractère discret étant insuffisant. L'ensemble des nombres rationnels est discret mais il est dense, ce qui signifie qu'entre deux rationnels on trouve une infinité d'autres rationnels : si le temps était indexé sur $\mathbb{Q}$, la prémisse (5) serait également mise en défaut puisqu'on ne pourrait alors pas trouver l'instant précédant immédiatement l'instant présent.

On arrive ensuite au point le plus problématique. L'auteur affirme que « dans un temps linéaire, continu et strictement ordonné, il est possible de construire un modèle $\mathcal{M}$ où (8) est valide, ainsi que son affaiblissement qu'est (5) » (contrairement à ce qu'avancent Prior et Fitting & Mendelsohn). Mais sa démonstration est erronée et ce résultat est faux.

— *La démonstration de (8) est erronée.*
L'auteur considère un modèle $\mathcal{M}$ « [p]artie d'un temps linéaire, continu et ordonné », composé de deux sous-ensembles S_1 et S_2 que l'on peut reconstituer respectivement comme un singleton et un intervalle ouvert sur la droite réelle, à savoir : $S_1 = \{n\}$ et $S_2 =]n, p[$ avec $n < p \leq \infty$.
On suppose d'autre part que Q n'est le cas nulle part sur S_2, ce qui implique que $\neg\mathbf{F}Q$, l'antécédent de (8), est vraie sur S_1 comme sur S_2, donc sur $\mathcal{M}$.
Il reste à montrer que $\mathbf{P}\neg\mathbf{F}Q$ est vraie sur $\mathcal{M}$. Or l'auteur ne fait qu'indiquer que « dans le passé de S_2, il existe un instant après lequel Q sera toujours faux : $\mathbf{P}\neg\mathbf{F}Q$ », ce qui est exact, pour conclure immédiatement : « La formule (8) est donc valide de manière non triviale dans $\mathcal{M}$ ». Mais encore faudrait-il que la formule (8) soit vraie sur S_1, i.e. en n, or elle ne l'est pas puisque S_1 est un singleton si bien qu'*il n'y a pas de passé depuis n* : $\mathbf{P}\neg\mathbf{F}Q$ est fausse sur S_1, elle n'est donc pas vraie sur $\mathcal{M}$.

— *Le résultat est faux.*
On peut s'étonner du choix très particulier du modèle $\mathcal{M}$ par l'auteur, qui non seulement prive S_1 de passé mais, si la démonstration avait été correcte, ne lui aurait pas conféré la portée générale que l'auteur prétend qu'elle a. Pour compléter la perspective envisageons alors un modèle amendé, qui évite de faire de n une sorte de « big bang » : $\mathcal{M}' = S'_1 \cup S_2$, où $S'_1 =]m, n]$ avec $-\infty \leq m < n$, et S_2 défini comme précédemment. NB. Que les intervalles soient ouverts ou fermés en m et p n'a aucun effet sur la suite de l'argument.
On suppose comme précédemment que Q n'est le cas nulle part sur S_2 ; $\neg\mathbf{F}Q$ est donc vraie sur S_2 ainsi qu'en n, quoique pas nécessairement sur tout l'intervalle S'_1. Dans ce nouveau modèle, n dispose d'un passé puisque $m < n$, et donc que S'_1 ne se réduit pas à un singleton. Alors on ne peut absolument pas conclure que $\mathbf{P}\neg\mathbf{F}Q$ est vraie ne serait-ce qu'en n. En effet, S'_1 étant continu donc dense, pour chaque instant $t \in S'_1$ du passé de n, i.e. tel que $m < t < n$, il existe une infinité d'instants de S'_1 strictement compris entre t et n. Or, sans hypothèse supplémentaire, il peut s'avérer que Q est le cas sur l'un au moins de ces instants, ce qui invaliderait $\neg\mathbf{F}Q$ en t, et qui par conséquent invaliderait

$\mathbf{P}\neg\mathbf{F}Q$ en n. On peut ainsi systématiquement construire un contre-modèle à la formule (8) sur $\mathcal{M}'$.

On peut conclure de ce qui précède que, contrairement à ce qu'affirme l'auteur, la formule (8) n'est pas valide si le temps est continu, et cela que l'instant présent (n) soit un instant initial (comme dans $\mathcal{M}$) ou qu'il ait un passé (comme dans $\mathcal{M}'$). Et comme l'a (maladroitement) suggéré Prior, la formule (5) n'est pas non plus valide pour une structure temporelle continue.

L'erreur est vraiment cruciale puisque la formule (8), censée remplacer (5), constitue le cœur de l'article. Par ailleurs si (5), censée formaliser une prémisse de Diodore, est intuitive au moins pour une structure temporelle isomorphe à l'ensemble des entiers relatifs, ce n'est absolument pas le cas de (8) qui, d'une certaine manière, fait abstraction de l'instant présent – et on voit, dans la démonstration, quel est le coût final de cette abstraction.

2 Deux autres problèmes

Prémisse (B) La première formalisation de la prémisse (B), qui finalement n'est pas retenue par l'auteur, est étrange. Cette formule est présentée comme un théorème de **K**, or c'est avant tout une tautologie déductible en logique des propositions :

$$\neg(A \to \neg B) \to (A \to B)$$

où $\Diamond Q$ et $\Diamond R$ sont respectivement substitués à A et B. Autant dire qu'en tant que tautologie, cette formule ne dit rien de substantiel qui ressemble à ladite prémisse, à savoir « L'impossible ne suit pas logiquement du possible ».

Prior et Fitting & Mendelsohn en proposent quant à eux une formalisation correcte, qui n'a rien à voir :

$$\Box(Q \to R) \to (\neg\Diamond R \to \neg\Diamond Q)$$

cette dernière formule étant valide dans **K** sans être une tautologie.

Prémisse (C) L'article présente cette prémisse (« Il y a un possible qui n'est ni ne sera jamais vrai ») par une suite de trois formules, en la plaçant sur le même plan que les deux premières. Or dans l'argument, cette proposition occupe un statut à part : Diodore (complété par Prior) montre que des prémisses (A) et (B) on déduit la négation de (C), à savoir que Ce qui n'est ni ne sera jamais vrai est impossible.

C'est la proposition (3') chez Prior :

$$(\neg Q \wedge \neg\mathbf{F}Q) \to \neg\Diamond Q$$

Ce n'est pas pour rien que Prior formalise la négation de (C) : on ne peut simplement pas formaliser (C), sauf à quantifier sur les formules atomiques. La présentation de cette « prémisse » dans l'article est donc très peu claire.

3 Points orthographiques et typographiques

— p.2, l.13 : le nom de la logique **Kt** introduit ici est utilisé ailleurs avec **t** en indice, i.e. sous la forme $\mathbf{K_t}$.

— p.2, l.15 : les modalités **P** et **F** sont existentielles, ce qui doit être au moins exprimé dans la lecture qu'on donne des symboles. Ainsi « Q était le cas » pour $\mathbf{P}Q$ suggère une interprétation universelle, il faudrait la remplacer par « Q a été le cas », voire préciser « Q a été le cas (au moins à un instant) ». Idem pour $\mathbf{F}Q$, qui devrait être lu « Q sera le cas (au moins à un instant) ».

— p.2, l.-12 : « comme contradictoire entre elles et en aurait déduit », à remplacer par « comme contradictoire entre elles et dont il aurait déduit ».

— p.6, paragraphe (E), l.2 : « un instant qui précède ce futur » doit être remplacé par « un instant du passé ».

— p.7, figure 1, démonstration 2, l.5 : supprimer l'espace entre $\rightarrow$ et E.

— p.10, l.2 : « il est donc est » : supprimer le deuxième « est ».

J'ai examiné la soumission intitulé "Prior remplace Diodore" ainsi que l'évaluation précédemment établie intitulée "Remarques sur Prior remplace Diodore". La critique principale que celle-ci adresse à celle-là, à savoir que la preuve de la proposition 1 est incorrecte, me semble correcte.

En effet, dans la preuve, l'auteur de l'article écrit "l'unique élément de $S1$ désigné par n correspond
dans M au conséquent du conditionnel $\neg FQ \rightarrow P\neg FQ$". Cette phrase est difficile à saisir (un élément ne correspond pas à une formule ??). On peut comprendre que n rend vrai pour pour les instants ultérieurs à n $\neg FQ$, ce qui est vrai. Mais comme le souligne l'auteur de l'évaluation, par construction, aucun élément ne vient rendre vrai $\neg FQ$ pour n lui-même. Or on en a bien besoin pour montrer que $\neg FQ \rightarrow P\neg FQ$ est vrai partout sur la structure.