
PRIOR REMPLACE DIODORE

Joseph Vidal-Rosset

Pour Isabelle Pariente-Butterlin

Résumé. — On prouve dans cet article que la démonstration que Prior a construite pour prouver le célèbre Argument Dominateur de Diodore se simplifie par la suppression des deux premières prémisses de Diodore. En ne conservant que les deux prémisses additionnelles de Prior et l'hypothèse d'un événement Q qui ne se réalisera jamais, on parvient à la conclusion de Diodore : Q est impossible. On évalue l'argument de Prior à la lumière de cette simplification qui remplace l'argument historique.

Abstract. — In this paper, we show that Prior's demonstration to prove Diodorus's Master Argument is simplified by dropping Diodorus's first two premises. Retaining only Prior's two additional premises and the assumption of an event Q that will never occur, we arrive at Diodorus's conclusion : Q is impossible. We evaluate Prior's argument in light of this simplification which replaces the historical argument.

Remerciements. — Je remercie Volpe pour la communication de sa thèse [12].

1. L'argument *Diodore-Prior-Fitting* en déduction naturelle

J'appelle *argument Diodore-Prior-Fitting* ou, plus simplement, *argument DPF*, l'argument de Diodore selon Prior [8], [9, pp. 32-33] dans la version semi-formelle de Fitting [5, pp. 38-40]. La preuve dans la Figure

1 de cette section s'appuie sur cette version, sans cependant faire usage de la règle du *modus tollens*. Elle développée dans deux styles de déduction naturelle : le style «arbre» de Gentzen, tel qu'il est utilisé par exemple par Negri et von Plato [7], et le style «drapeau» de Fitch, dans la notation de Magnus *et al.* [6], où les prémisses (notées PR) sont clairement distinguées des hypothèses (notées AS), celles-ci étant déchargées, contrairement à celles-là.

L'ensemble des symboles du langage-objet utilisé pour cette preuve est composé de deux sous-ensembles de symboles, dont le premier est celui des symboles du langage de la logique modale propositionnelle où

$$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \perp, Q, \Diamond, \Box,), ($$

sont respectivement les connecteurs usuels (négation, conjonction, disjonction et conditionnel), la constante du faux, la variable propositionnelle Q , les opérateurs modaux de possibilité et de nécessité, et enfin les parenthèses. Le second sous-ensemble ne contient que deux symboles qui sont spécifiques à la logique temporelle minimale **Kt** [2, pp. 13-70] : il s'agit des deux opérateurs temporels **P**, **F** qui, dans les expressions **PQ** et **FQ** signifient respectivement « Q était le cas» et « Q sera le cas».

Les symboles qui appartiennent au métalangage dans cet article sont ceux de la dérivabilité syntaxique, de la relation d'ordre strict, deux instants indiqués par des symboles de constantes, et enfin un symbole pour désigner un modèle temporel, respectivement :

$$\vdash, <, m, n, \mathcal{M}$$

Donnons maintenant la traduction formelle des prémisses de l'*argument DPF*. Les trois premières sont celles que Diodore aurait perçues comme contradictoires entre elles et en aurait déduit que ce qui n'est ni jamais ne sera est impossible [13, p. 15]. Mais il est douteux qu'une contradiction soit logiquement déductible de ces trois premières prémisses sans qu'il soit nécessaire d'en ajouter d'autres pour déduire la conclusion de Diodore ; Prior en a ajouté deux. Examinons maintenant ces cinq prémisses et leurs traductions formelles respectives.

(A) *Toute proposition vraie concernant le passé est nécessaire.*

On exprime cette prémisse par une règle d'inférence *ad hoc* :

$$\frac{\mathbf{P}Q}{\neg\Diamond\neg\mathbf{P}Q} \neg\Diamond\neg\mathbf{P}$$

Q fut le cas, il est donc absurde d'en déduire qu'il est possible que Q n'ait pas été le cas.

(B) *L'impossible ne suit pas logiquement du possible.*

S'il est faux que, si Q est possible, alors R est impossible, alors, si Q est possible, R l'est aussi ; en formule :

$$\neg(\Diamond Q \rightarrow \neg\Diamond R) \rightarrow (\Diamond Q \rightarrow \Diamond R)$$

Il s'agit là d'un *théorème* de **K**, le système de logique modale normale et minimale défini par Kripke. Cependant, de l'hypothèse de la possibilité que Q , on ne peut déduire la possibilité de R qu'à la condition que R soit une *conséquence logique* de Q [5, n.6, p. 39], autrement dit, qu'à la condition que l'on puisse appliquer la règle de logique modale $\Diamond E$ [4, p. 71] :

$$\frac{\begin{array}{c} 1 \\ [Q] \\ \vdots \\ \Diamond Q \quad R \end{array}}{\Diamond R} \Diamond E 1$$

Dans l'*argument DPF*, la règle $\Diamond E$ remplace la prémisse (B).

(C) *Il y a un possible qui n'est ni ne sera jamais vrai.*

Soit un événement quelconque Q . Cette prémisse se décompose en trois affirmations distinctes : Q est possible, Q n'est pas le cas maintenant, Q ne sera jamais le cas, affirmations qui s'écrivent respectivement :

$$\Diamond Q \tag{1}$$

$$\neg Q \tag{2}$$

$$\neg \mathbf{F}Q \tag{3}$$

(D) *Qu'un événement quelconque soit maintenant le cas implique l'absurdité de l'hypothèse de l'existence d'un instant passé après lequel cet événement ne serait jamais le cas.*

En formule :

$$Q \vdash_{\mathbf{K}_t} \neg \mathbf{P} \neg \mathbf{F}Q \tag{4}$$

Ce séquent est une vérité déductible de la seule signification des opérateurs temporels, autrement dit, il est *prouvable* dans le système $\mathbf{K}_t$, c'est-à-dire en logique temporelle minimale, comme le montre la méthode de preuve indirecte de Copeland [3] : on ne peut pas sans absurdité soutenir la négation de la formule (4), c'est-à-dire affirmer d'une part, que Q est le cas en n , et d'autre part affirmer que, dans le passé de Q , à un instant m tel que $m < n$, il est vrai que Q ne sera jamais le cas, ce qui reviendrait à affirmer Q est à la fois vrai et faux en n . La négation de (4) étant absurde, (4) est valide dans $\mathbf{K}_t$. Cette vérité de la logique temporelle minimale sera utilisée dans la preuve formelle de l'argument comme prémisses mineures de l'application de la règle $\Diamond E$:

$$\frac{\frac{\frac{1}{[Q]} \quad \mathbf{K}_t}{\neg \mathbf{P} \neg \mathbf{F} Q}}{\Diamond Q} \quad \frac{\Diamond Q \quad \neg \mathbf{P} \neg \mathbf{F} Q}{\Diamond \neg \mathbf{P} \neg \mathbf{F} Q} \Diamond E \ 1$$

(E) *Supposons un événement qui ne se produise ni maintenant ni à l'avenir, alors il y a au moins un instant qui précède ce futur, instant après lequel cet événement ne se produira jamais.* Ce qui s'écrit :

$$(\neg Q \wedge \neg \mathbf{F} Q) \rightarrow \mathbf{P} \neg \mathbf{F} Q \quad (5)$$

En raison de la contradiction déduite de l'hypothèse (1) et des prémisses (2), (3) et (5), on rejette l'hypothèse (1) en la niant, ce qui est exprimé par le séquent (6) dont la preuve est donnée en déduction naturelle dans le style de Gentzen, puis dans celui de Fitch, Figure 1, page 5.

2. Analyse de l'argument simplifié

Étonnamment, les preuves de (7) parviennent à la même conclusion que celles de (6), en ne supposant que *deux* prémisses, c'est-à-dire

$$\neg \mathbf{F} Q \rightarrow \mathbf{P} \neg \mathbf{F} Q \quad (8)$$

et l'antécédent de ce conditionnel, qui correspond à (3). La formule (5) apparaissant alors comme un affaiblissement inutile de (8), on constate qu'à l'exception de (3), cet argument simplifié ne mentionne plus les prémisses de Diodore, mais uniquement les prémisses additionnelles de

$$(\neg Q \wedge \neg \mathbf{F}Q) \rightarrow \mathbf{P}\neg \mathbf{F}Q, \neg Q, \neg \mathbf{F}Q \vdash \neg \Diamond Q \quad (6)$$

Démonstration. —

$$\frac{\frac{(\neg Q \wedge \neg \mathbf{F}Q) \rightarrow \mathbf{P}\neg \mathbf{F}Q \quad \frac{\neg Q \quad \neg \mathbf{F}Q}{\neg Q \wedge \neg \mathbf{F}Q} \wedge I}{\mathbf{P}\neg \mathbf{F}Q} \rightarrow E \quad \frac{\frac{1 \quad \frac{2 \quad [Q]}{\neg \mathbf{P}\neg \mathbf{F}Q} \mathbf{K}_t}{[\Diamond Q]} \Diamond E \ 2}{\Diamond \neg \mathbf{P}\neg \mathbf{F}Q} \neg E}{\frac{\neg \Diamond \neg \mathbf{P}\neg \mathbf{F}Q \quad \neg \Diamond \neg \mathbf{P}}{\neg \Diamond Q} \neg I \ 1} \perp$$

□

Démonstration. —

1		$(\neg Q \wedge \neg \mathbf{F}Q) \rightarrow \mathbf{P}\neg \mathbf{F}Q$	PR
2		$\neg Q$	PR
3		$\neg \mathbf{F}Q$	PR
4		$\neg Q \wedge \neg \mathbf{F}Q$	$\wedge I \ 2, 3$
5		$\mathbf{P}\neg \mathbf{F}Q$	$\rightarrow E \ 1, 4$
6		$\neg \Diamond \neg \mathbf{P}\neg \mathbf{F}Q$	$\neg \Diamond \neg \mathbf{P} \ 5$
7		$\Diamond Q$	AS
8		$\square \mid Q$	AS
9		$\neg \mathbf{P}\neg \mathbf{F}Q$	$\mathbf{K}_t \ 8$
10		$\Diamond \neg \mathbf{P}\neg \mathbf{F}Q$	$\Diamond E \ 7, 8-9$
11		$\perp$	$\neg E \ 6, 10$
12		$\neg \Diamond Q$	$\neg I \ 7-11$

□

FIGURE 1. Preuves du séquent (6)

$$\neg \mathbf{F}Q \rightarrow \mathbf{P}\neg \mathbf{F}Q, \neg \mathbf{F}Q \vdash \neg \Diamond Q \quad (7)$$

Démonstration. —

$$\frac{\frac{\frac{1}{[Q]} \quad \neg \mathbf{P}\neg \mathbf{F}Q}{\neg \mathbf{P}\neg \mathbf{F}Q} \mathbf{Kt} \quad \frac{\neg \mathbf{F}Q \rightarrow \mathbf{P}\neg \mathbf{F}Q \quad \neg \mathbf{F}Q}{\mathbf{P}\neg \mathbf{F}Q} \rightarrow E}{\frac{\frac{\frac{\perp}{\neg Q} \neg I \ 1}{\Box \neg Q} \Box I}{\neg \Diamond Q} \neg E} \neg E$$

□

Démonstration. —

1		$\neg \mathbf{F}Q \rightarrow \mathbf{P}\neg \mathbf{F}Q$	PR
2		$\neg \mathbf{F}Q$	PR
3		$\mathbf{P}\neg \mathbf{F}Q$	$\rightarrow E \ 1, 2$
4		$\Box$ Q	AS
5		$\neg \mathbf{P}\neg \mathbf{F}Q$	$\mathbf{Kt} \ 4$
6		$\perp$	$\neg E \ 5, 3$
7		$\neg Q$	$\neg I \ 4-6$
8		$\Box \neg Q$	$\Box I \ 4-7$
9		$\neg \Diamond Q$	$\equiv 8$

□

La double ligne horizontale et $\equiv$ (respectivement, première et seconde démonstration) signifient que $\Box \neg Q$ et $\neg \Diamond Q$ sont équivalents, ce qui est [prouvable](#) en $\mathbf{K}$ et en logique modale intuitionniste.

FIGURE 2. Preuves du séquent (7)

Prior. Cette simplification est donc un remplacement de l'argument de Diodore par celui de Prior.

En tant que théorème fondamental de la logique temporelle minimale, la première prémisse additionnelle de Prior traduite par (4) ne pose pas de problème particulier. En revanche, on sait que (5) a finalement été interprétée comme l'affirmation implicite d'un temps *discret*, c'est-à-dire, au sens topologique de ce terme, un temps où tous les instants sont *isolés* et, dans le cadre de l'analyse, un temps linéaire où la relation d'ordre strict $<$ entre les instants est représentée à l'aide de l'ensemble des entiers ou des entiers relatifs. Si le temps est discret, alors ce que dit (5) devient évident : si Q n'est le cas ni maintenant ni à l'avenir, alors il y a un instant qui précède immédiatement Q après lequel Q est faux et le restera. En revanche, il semble qu'admettre un temps dense ou continu permette de falsifier (5), car déclarer que Q ne sera jamais le cas n'autorise pas à conclure qu'il existe un instant après lequel Q ne sera jamais le cas si, dans le passé de cette période à venir, il existe toujours un instant où Q peut être le cas. Telle est la raison qui a convaincu Prior [9, p. 49] que (5) n'est valide qu'à la condition d'imposer au temps une structure discrète. Vuillemin [13, pp. 23-24] et Fitting [5, p. 39] l'ont suivi sur ce point, mais à tort : dans un temps linéaire, continu et strictement ordonné, il est possible de construire modèle $\mathcal{M}$ où (8) est valide, ainsi que son affaiblissement qu'est (5). La preuve de la proposition suivante construit un tel modèle.

Proposition 2.1. — *Dans un temps linéaire et continu où Q est déclaré en n comme toujours faux à l'avenir, il suffit de définir n comme la borne inférieure de cet avenir pour conclure que Q est impossible en n .*

Démonstration. — Cette démonstration s'inspire d'une preuve de Rescher et Urquhart [10, pp. 96–97] qui fait écho à un résultat de Bull [1].

Partie d'un temps linéaire, continu et strictement ordonné, $\mathcal{M}$ est un modèle composé de S_1 et S_2 qui sont consécutifs, autrement dit, S_1 et S_2 sont deux sous-ensembles disjoints dont les éléments sont des instants. Pour simplifier la démonstration, définissons S_1 comme un singleton dont l'unique élément n est l'instant qui précède n'importe quel instant de S_2 , ce qui fait de S_1 la *borne inférieure* de S_2 [11, pp. 83–85]. S_2 n'a ni premier ni dernier instant, et Q n'est le cas en aucun de ses instants.

Montrons maintenant que $\mathcal{M}$ vérifie (8). Notons d'une part que $\neg \mathbf{F}Q$, c'est-à-dire l'antécédent du conditionnel (8), est vrai en n , comme en n'importe quel instant de S_2 . D'autre part, l'unique élément de S_1 désigné

par n correspond dans $\mathcal{M}$ au conséquent du conditionnel (8), c'est-à-dire $\mathbf{P}\neg\mathbf{F}Q$. En effet, il est vrai en S_1 comme en S_2 que Q sera toujours faux en S_2 , ce qui implique que, dans le passé de S_2 , il existe un instant après lequel Q sera toujours faux : $\mathbf{P}\neg\mathbf{F}Q$. La formule (8) est donc valide de manière non triviale dans $\mathcal{M}$.

Supposons maintenant que Q soit le cas en n . Donc, puisqu'il n'y a pas d'instant passé qui précède n , il n'y a évidemment pas d'instant passé après lequel Q ne sera jamais le cas. On retrouve (4) : affirmer que Q est le cas en n implique que

$$\neg\mathbf{P}\neg\mathbf{F}Q \quad (9)$$

est vrai en n . Mais on vient de voir que (8) et (3) sont vrais en n et donc, par application de la règle $\rightarrow E$, on peut détacher le conséquent de (8) et affirmer que

$$\mathbf{P}\neg\mathbf{F}Q \quad (10)$$

est vrai en n . Contradiction. Il est donc absurde de supposer que Q soit le cas en n et, par conséquent, il est nécessaire que Q ne soit pas le cas en n ou, ce qui est équivalent, il est impossible que Q soit le cas en n . Dans le système de déduction naturelle étiquetée de Volpe [12], où l'on substitue $\neg\mathbf{P}\neg$ à $\mathbf{H}$ pour l'application de la règle $\mathbf{H}I$, il suffit de raisonner sur la borne n pour obtenir le même résultat :

$$\frac{\frac{\frac{1}{[n : Q]} \quad \frac{2}{[m < n]} \mathbf{F}I}{m : \mathbf{F}Q} \mathbf{H}I \ 2 \quad \frac{n : \neg\mathbf{F}Q \rightarrow \mathbf{P}\neg\mathbf{F}Q \quad n : \neg\mathbf{F}Q}{n : \mathbf{P}\neg\mathbf{F}Q} \rightarrow E}{\frac{n : \neg\mathbf{P}\neg\mathbf{F}Q}{n : \neg\mathbf{P}\neg\mathbf{F}Q} \neg E} \neg E$$

$$\frac{\frac{n : \perp}{n : \neg Q} \neg I \ 1}{\frac{\Box n : \neg Q}{\neg\Diamond n : Q} \Box I} \Box I$$

Par conséquent, dans un temps linéaire et continu où Q est déclaré en n comme toujours faux à l'avenir, il suffit de définir n comme la borne inférieure de cet avenir pour conclure que Q est impossible en n . $\square$

Références

- [1] R. BULL – « An Algebraic Study of Tense Logics with Linear Time », *The Journal of Symbolic Logic* **33**(1968), no. 1, p. 27–38.
- [2] J. BURGESS – *Philosophical Logic*, Princeton University Press, 2009.

- [3] B. J. COPELAND – « Tense Trees : A Tree System for K_t », *Notre Dame Journal of Formal Logic* **24**(1983), no. 3, p. 318 – 322.
- [4] F. B. FITCH – *Symbolic logic. An Introduction*, The Ronald Press Company, New York, U.S.A., 1952.
- [5] M. FITTING & R. L. MENDELSON – *First-Order Modal Logic*, Synthese Library, vol. 277, Kluwer Academic Publishers, 1998.
- [6] P. D. MAGNUS, T. BUTTON, R. TRUEMAN, R. ZACH & A. THOMAS-BOLDUC – *forall x : Calgary. An Introduction to Formal Logic (4th edition)*, Open Logic Project, Calgary, 2023.
- [7] S. NEGRI & J. VON PLATO – *Structural Proof Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [8] A. N. PRIOR – « Diodoran Modalities », *The Philosophical Quarterly* (1950-) **5**(1955), no. 20, p. 205–213.
- [9] ———, *Past, Present, and Future*, Oxford University Press, 1967.
- [10] N. RESCHER & A. URQUHART – *Temporal Logic*, Springer Verlag, New York, 1971.
- [11] L. SCHWARTZ – *Analyse, 1. Théorie des ensemble et topologie*, Collection Enseignement des sciences 42, Hermann, 1991.
- [12] M. VOLPE – « Labeled Natural Deduction for Temporal Logics », Thèse, University of Verona, Verona, Italy, 2010.
- [13] J. VUILLEMIN – *Nécessité ou contingence : l'aporie de Diodore et les systèmes philosophiques*, Ed. de Minuit, Paris, 1984.

26 avril 2025

JOSEPH VIDAL-ROSSET, Université de Lorraine, Département de philosophie,
 Archives Poincaré, UMR 7117 du CNRS, • 91 bd Libération, 54000 Nancy,
 France. • E-mail : joseph.vidal-rosset@univ-lorraine.fr